

**Les exercices de cette feuille sont à travailler pendant les vacances.
Vous serez interrogés sur des exercices similaires à la rentrée.**

Exercice 1 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$.

1. Étudier le sens de variation de f .
2. Dresser le tableau de variations de f .
3. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout $x \neq 1$, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 1}$.
4. Déterminer l'extremum de f sur l'intervalle $] -\infty; 1[$.
5. Trouver une équation de la tangente \mathcal{T} à la courbe \mathcal{C}_f de f au point d'abscisse 0.

Exercice 2 : Soit la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par : $u_1 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{5}$.

1. Montrer que la suite (v_n) de terme général $v_n = u_n - \frac{2}{5}$ est une suite géométrique.
2. En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n . Calculer alors la valeur exacte de u_4 .
3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et calculer sa limite.
4. On cherche à déterminer le plus petit entier naturel p à partir duquel $u_n \leq 0,401$. Pour cela nous allons utiliser un algorithme.

Initialisation
 U prend la valeur $\frac{1}{2}$
 n prend la valeur 1

Traitement
 Tant que faire
 U prend la valeur
 n prend la valeur

Fin Tant que

Sortie
 Afficher

- a) Compléter l'algorithme précédent afin qu'il détermine la valeur de p .
- b) Recopier et compléter autant que nécessaire les colonnes du tableau suivant (on arrondira à 10^{-4} près)

n	1				
U	$\frac{1}{2}$				
Condition	VRAIE				

- c) En déduire la valeur de p .
5. Exprimer la somme $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ en fonction de n .

Exercice 3 : Lors d'une étude de marché, la société PAPEX a étudié la répartition de ses clients selon deux critères, leur besoin en papier et leur possibilité de financement :

35% de ses clients utilisent moins de 12 tonnes de papier par an et, parmi ceux-ci, 80% sont solvables.

40% de ses clients utilisent de 12 à 20 tonnes de papier par an et, parmi ceux-ci, 85% sont solvables.

Pour le reste de ses clients, seuls 10% ne sont pas solvables.

1. La société choisit au hasard l'un de ses clients. Quelle est la probabilité :

a) pour qu'il utilise plus de 20 tonnes de papier ?

b) pour qu'il ne soit pas solvable ?

2. La société établit un échantillon de 20 de ses clients choisis au hasard. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de clients non solvables parmi ces 20 clients.

a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et son espérance.

b) Calculer $P(X = 3)$; $P(X \leq 8)$ et $P(X \geq 4)$. On donnera les résultats à la cinquième décimale.

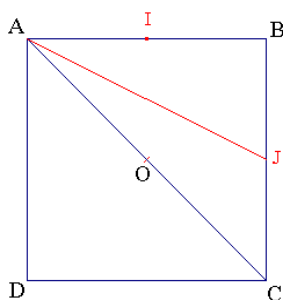
Exercice 4 : *Cet exercice est composé de questions simples et indépendantes visant à tester vos connaissances sur le produit scalaire.*

1. Déterminer l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que $x^2 + y^2 + x - 2y = 0$.

2. Déterminer une équation du cercle \mathcal{C} de centre $\Omega(2; -3)$ et tangent à la droite d'équation $x - y + 1 = 0$.

3. $ABCD$ est un parallélogramme tel que $AB = 4$, $AD = 3$ et $AC = 6$. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

4. Sur la figure ci-dessous, $ABCD$ est un carré de côté a et de centre O . Les points I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$. On note α la mesure de l'angle \widehat{JAC} .



Donner la valeur exacte de $\cos \alpha$ puis donner une valeur approchée de α à 1 degré près.

ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Exercice 1 :

1. $f : x \rightarrow \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ de dérivée : $f'(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2 + 3)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$.

Sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f'(x)$ admet le signe de $x^2 - 2x - 3$ car $(x-1)^2 > 0$. $x^2 - 2x - 3$ est positif (coefficient de x^2 positif) à l'extérieur de ses deux racines -1 et 3 .

f est donc croissante sur $] -\infty; -1]$ et sur $[3; +\infty [$, et f est décroissante sur $[-1; 1 [$ et sur $] 1; 3]$.

2. $f(-1) = \frac{4}{-2} = -2$ et $f(3) = \frac{12}{2} = 6$. On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
f		↗ -2 ↘		↘ 6 ↗	

3. Après réduction au même dénominateur et identification, on a pour tout $x \neq 1$, $f(x) = x + 1 + \frac{4}{x - 1}$.
4. D'après le tableau de variations, sur $] -\infty; 1 [$ la dérivée s'annule et change de signe du plus au moins en $x = -1$.
Par conséquent, sur l'intervalle $] -\infty; 1 [$, f admet -2 pour maximum atteint en $x = -1$.
5. $\mathcal{T}_0 : y = f'(0)(x - 0) + f(0) \Leftrightarrow \mathcal{T}_0 : y = -3x - 3$.

Exercice 2 :

1. $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{5} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{5} - \frac{2}{5} = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{5} = \frac{1}{2}\left(u_n - \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{2}v_n$.

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $v_1 = u_1 - \frac{2}{5} = \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{1}{10}$.

2. D'après la question précédente, on a : $v_n = v_1 \times q^{n-1} = \frac{1}{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Or $v_n = u_n - \frac{2}{5}$ donc $u_n = v_n + \frac{2}{5}$ soit $u_n = \frac{1}{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{2}{5}$.

Ainsi, $u_4 = \frac{1}{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{4-1} + \frac{2}{5} = \frac{1}{10} \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{2}{5} = \frac{1}{10} \times \frac{1}{8} + \frac{2}{5} = \frac{1}{80} + \frac{32}{80} = \frac{33}{80}$.

3. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n - \frac{2}{5} - u_n = -\frac{1}{2}u_n - \frac{2}{5}$. De manière évidente $u_n > 0$ donc $u_{n+1} - u_n < 0$. Ce qui prouve que la suite (u_n) est décroissante.

De plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ puisque $-1 < \frac{1}{2} < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ et par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2}{5}$.

4. a) On obtient l'algorithme suivant :

Initialisation
 U prend la valeur $\frac{1}{2}$
 n prend la valeur 1
Traitement
 Tant que $U > 0,401$ faire
 U prend la valeur $\frac{1}{2}U + \frac{1}{5}$
 n prend la valeur $n + 1$
 Fin Tant que
Sortie
 Afficher n

b) On obtient le tableau suivant

n	1	2	3	4	5	6	7	8
U	$\frac{1}{2}$	0,45	0,425	0,4125	0,4063	0,4031	0,4016	0,4008
Condition $U > 0,401$	VRAIE	VRAIE	VRAIE	VRAIE	VRAIE	VRAIE	VRAIE	FAUSSE

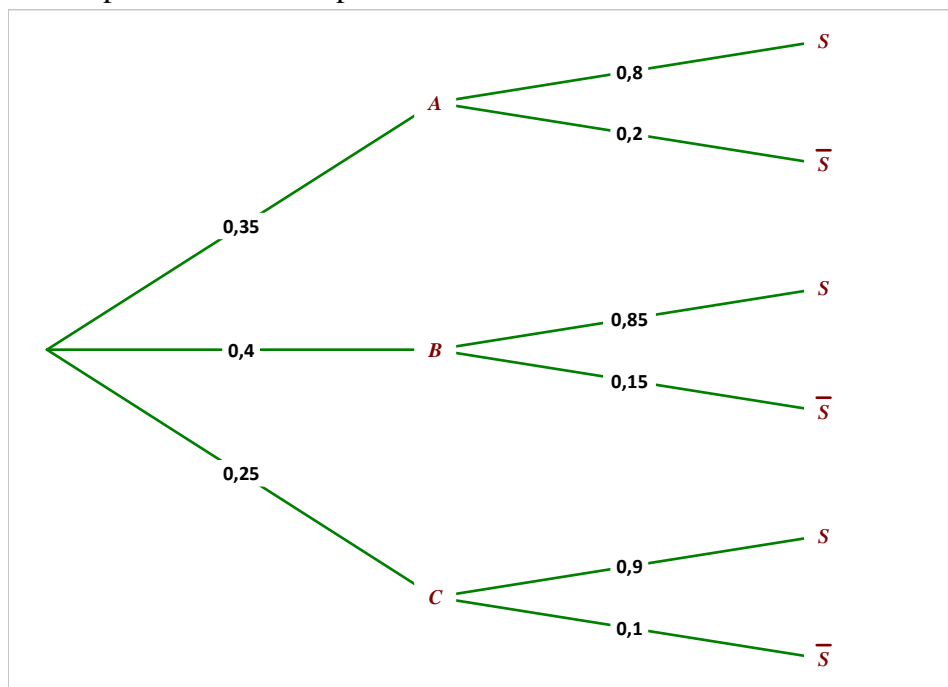
c) D'après le tableau précédent, on a $p = 8$.

5.
$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = v_1 + \frac{2}{5} + v_2 + \frac{2}{5} + \dots + v_n + \frac{2}{5} = v_1 + v_2 + \dots + v_n + \frac{2}{5}n = \frac{1}{10} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{2}{5}n.$$

Donc
$$S_n = \frac{1}{5} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] + \frac{2}{5}n.$$

Exercice 3 :

1. Construisons l'arbre de probabilité correspondant à la situation :



Où A : « le client utilise moins de 12 tonnes de papier par an »

B : « le client utilise entre 12 et 20 tonnes de papier par an »

C : « le client utilise plus de 20 tonnes de papier par an »

S : « le client est solvable »

a) $P(C) = 1 - [P(A) + P(B)] = 1 - 0,75 = 0,25.$

b) $P(\bar{S}) = P(\bar{S} \cap A) + P(\bar{S} \cap B) + P(\bar{S} \cap C) = 0,35 \times 0,2 + 0,4 \times 0,15 + 0,25 \times 0,1 = 0,155.$

2. a) On a une épreuve de Bernoulli (le client est solvable ou pas) que l'on répète 20 fois de manières indépendantes, on obtient donc un schéma de Bernoulli.

La variable aléatoire X qui représente le nombre de clients non solvable suit donc une loi binomiale de paramètre $n = 20$ et $p = 0,155$.

Par conséquent, $E(X) = np = 20 \times 0,155 = 3,1.$

b) À l'aide de la calculatrice, on obtient : $P(X = 3) \approx 0,24236.$

À l'aide de la calculatrice, on obtient : $P(X \leq 8) \approx 0,99831.$

$P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - P(X \leq 3).$

À l'aide de la calculatrice, on obtient : $P(X \geq 4) \approx 0,37661.$

Exercice 4 :

1. $x^2 + y^2 + x - 2y = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + (y-1)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{5}{4}.$

Donc M appartient au cercle de centre $\Omega\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}.$

2. Déterminons tout d'abord une équation de la droite \mathcal{D} perpendiculaire à la droite Δ d'équation $x - y + 1 = 0.$

Or un vecteur normal de \mathcal{D} est un vecteur directeur de Δ , ainsi $\vec{n}_{\mathcal{D}}(1; 1).$

$M(x; y) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} \cdot \vec{n}_{\mathcal{D}} = 0 \Leftrightarrow x_{\Omega M} \times x_{\vec{n}_{\mathcal{D}}} + y_{\Omega M} \times y_{\vec{n}_{\mathcal{D}}} = 0 \Leftrightarrow (x-2) \times 1 + (y+3) \times 1 = 0.$

Par conséquent, \mathcal{D} a pour équation : $x + y + 1 = 0.$

Déterminons maintenant les coordonnées du point d'intersection, noté I, des droites \mathcal{D} et $\Delta.$

$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ y = -x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ x + 1 = -x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = -2 \end{cases}.$ Donc $I(-2; -1).$

Le cercle \mathcal{C} est donc le cercle de centre Ω est de rayon $\Omega I.$

Or $\Omega I = \sqrt{(x_I - x_{\Omega})^2 + (y_I - y_{\Omega})^2} = \sqrt{(-2 - 2)^2 + (-1 + 3)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}.$

Ainsi, l'équation de \mathcal{C} est : $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 20.$

3. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - AD^2) = \frac{1}{2}(16 + 36 - 9) = \frac{43}{2}.$

$$4. \quad \overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}^2 + \underbrace{\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BJ})}_{=0} + \overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}^2 = AB^2 + \frac{1}{2} BC^2 = a^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{3a^2}{2}.$$

De plus, on a $\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{AC} = AJ \times AC \times \cos \widehat{JAC}$. Or on sait que $AC = a\sqrt{2}$ car la diagonale d'un carré est égale au produit de la longueur d'un côté par $\sqrt{2}$. Calculons maintenant la longueur AJ.

D'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle rectangle ABJ, on a :

$$AJ^2 = AB^2 + BJ^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4} \text{ donc } AJ = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{On obtient donc : } \overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a\sqrt{5}}{2} \times a\sqrt{2} \times \cos \widehat{JAC} = \frac{a^2\sqrt{10}}{2} \times \cos \widehat{JAC}$$

$$\text{De ces deux expressions de } \overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{AC}, \text{ on en déduit que : } \frac{a^2\sqrt{10}}{2} \times \cos \widehat{JAC} = \frac{3a^2}{2} \text{ soit } \cos \widehat{JAC} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

$$\text{Soit encore } \cos \widehat{JAC} = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \text{ d'où } \widehat{JAC} \approx 18^\circ.$$