**Les exercices de cette feuille sont à travailler pendant les vacances.**
**Vous serez interrogés sur des exercices similaires à la rentrée.**

**<u>Exercice 1 :</u>** *Cet exercice est composé de questions simples et indépendantes visant à tester vos connaissances sur le produit scalaire.*

**1.** Déterminer l'ensemble des points $M(x\,;y)$ du plan tels que $x^2+y^2+x-2y=0$.

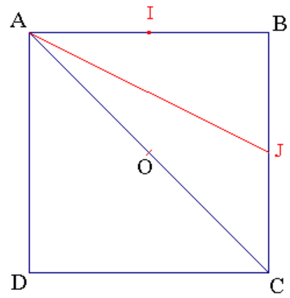
**2.** Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(2\,;-3)$ et tangent à la droite d'équation $x-y+1=0$.

**3.** Soit $[AB]$ un segment de longueur 4.

Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2+MB^2=16$.

**4.** $ABCD$ est un parallélogramme tel que $AB=4$, $AD=3$ et $AC=6$. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

**5.** Sur la figure ci-dessous, ABCD est un carré de côté $a$ et de centre O. Les points I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [BC]. On note $\alpha$ la mesure de l'angle $\widehat{JAC}$.




Donner la valeur exacte de $\cos\alpha$ puis donner une valeur approchée de $\alpha$ à 1 degré près.

**<u>Exercice 2 :</u>** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par : $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-1}$.

**1.** Étudier le sens de variation de *f*.

**2.** Dresser le tableau de variations de *f*.

**3.** Déterminer les réels *a*, *b* et *c* tels que, pour tout $x\neq1$, $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$.

**4.** Montrer que le point $A(1;2)$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$.

**5.** Trouver une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ de *f* au point d'abscisse 0.

**<u>Exercice 3 :</u>** Soit la suite $(u_n)_{n\geqslant1}$ définie par : $u_1=\dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1}=\dfrac{1}{2}u_n+\dfrac{1}{5}$.

**1.** Montrer que la suite $(v_n)$ de terme général $v_n=u_n-\dfrac{2}{5}$ est une suite géométrique.

**2.** En déduire l'expression de $v_n$ puis de $u_n$ en fonction de *n*. Calculer alors la valeur exacte de $u_4$.

**3.** Montrer que la suite $(u_n)$ est décroissante et calculer sa limite.

**4.** Déterminer le plus petit entier naturel *p* à partir duquel $u_n\leqslant0{,}401$

**5.** Exprimer la somme $S_n=u_1+u_2+...+u_n$ en fonction de *n*.

**<u>Exercice 4 :</u>** Lors d'une étude de marché, la société PAPEX a étudié la répartition de ses clients selon deux critères, leur besoin en papier et leur possibilité de financement :

35% de ses clients utilisent moins de 12 tonnes de papier par an et, parmi ceux-ci, 80% sont solvables.

40% de ses clients utilisent de 12 à 20 tonnes de papier par an et, parmi ceux-ci, 85% sont solvables.

Pour le reste de ses clients, seuls 10% ne sont pas solvables.

**1.** La société choisit au hasard l'un de ses clients. Quelle est la probabilité :

**a)** pour qu'il utilise plus de 20 tonnes de papier ?

**b)** pour qu'il ne soit pas solvable ?

**2.** La société établit un échantillon de 20 de ses clients choisis au hasard. On désigne par $X$ la variable aléatoire égale au nombre de clients non solvables parmi ces 20 clients.

**a)** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $X$ et son espérance.

**b)** Calculer $P(3 \leqslant X \leqslant 8)$ et $P(X \geqslant 4)$. On donnera les résultats à la cinquième décimale.

# ÉLÉMENTS DE CORRECTION

**Exercice 1 :**

**1.** $x^2+y^2+x-2y=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+(y-1)^2-1=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{5}{4}$.

Donc M appartient au cercle de centre $\Omega\left(-\frac{1}{2};1\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

**2.** Déterminons tout d'abord une équation de la droite $\mathscr{D}$ perpendiculaire à la droite $\Delta$ d'équation $x-y+1=0$.

Or un vecteur normal de $\mathscr{D}$ est un vecteur directeur de $\Delta$, ainsi $\vec{n}_{\mathscr{D}}(1;1)$.

$M(x;y)\in\mathscr{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M}\cdot\vec{n}_{\mathscr{D}}=0 \Leftrightarrow x_{\overrightarrow{\Omega M}}\times x_{\vec{n}_{\mathscr{D}}}+y_{\overrightarrow{\Omega M}}\times y_{\vec{n}_{\mathscr{D}}}=0 \Leftrightarrow (x-2)\times 1+(y+3)\times 1=0$.

Par conséquent, $\mathscr{D}$ a pour équation : $x+y+1=0$.

Déterminons maintenant les coordonnées du point d'intersection, noté *I*, des droites $\mathscr{D}$ et $\Delta$.

$\begin{cases} x-y+1=0 \\ x+y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x+1 \\ y=-x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x+1 \\ x+1=-x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x+1 \\ x=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=-2 \end{cases}$. Donc $I(-2;-1)$.

Le cercle $\mathscr{C}$ est donc le cercle de centre $\Omega$ est de rayon $\Omega I$.

Or $\Omega I=\sqrt{(x_I-x_\Omega)^2+(y_I-y_\Omega)^2}=\sqrt{(-2-2)^2+(-1+3)^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}$.

Ainsi, l'équation de $\mathscr{C}$ est : $(x-2)^2+(y+3)^2=20$.

**3.** Posons *I* le milieu du segment $[AB]$, on a alors :

$MA^2+MB^2=16 \Leftrightarrow 2MI^2+\frac{AB^2}{2}=16 \Leftrightarrow 2MI^2+8=16 \Leftrightarrow MI^2=4 \Leftrightarrow MI=2$.

Donc *M* appartient au cercle de centre *I* et de rayon 2.

**4.** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-AD^2\right)=\frac{1}{2}(16+36-9)=\frac{43}{2}$.

**5.** $\overrightarrow{\mathrm{AJ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BJ}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}})=\overrightarrow{\mathrm{AB}}^2+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{BJ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BJ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}^2+\underbrace{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{BJ}})}_{=0}+\overrightarrow{\mathrm{BJ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AJ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}^2=\mathrm{AB}^2+\frac{1}{2}\mathrm{BC}^2=a^2+\frac{a^2}{2}=\frac{3a^2}{2}$.

De plus, on a $\overrightarrow{\mathrm{AJ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\mathrm{AJ}\times\mathrm{AC}\times\cos\widehat{\mathrm{JAC}}$. Or on sait que $\mathrm{AC}=a\sqrt{2}$ car la diagonale d'un carré est égale au produit de la longueur d'un côté par $\sqrt{2}$. Calculons maintenant la longueur AJ.

D'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle rectangle ABJ, on a :

$\mathrm{AJ}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BJ}^2=a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=a^2+\frac{a^2}{4}=\frac{5a^2}{4}$ donc $\mathrm{AJ}=\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

On obtient donc : $\overrightarrow{\mathrm{AJ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{a\sqrt{5}}{2}\times a\sqrt{2}\times\cos\widehat{\mathrm{JAC}}=\frac{a^2\sqrt{10}}{2}\times\cos\widehat{\mathrm{JAC}}$

De ces deux expressions de $\overrightarrow{\mathrm{AJ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, on en déduit que : $\frac{a^2\sqrt{10}}{2}\times\cos\widehat{\mathrm{JAC}}=\frac{3a^2}{2}$ soit $\cos\widehat{\mathrm{JAC}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$.

Soit encore $\cos\widehat{\mathrm{JAC}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$, d'où $\widehat{\mathrm{JAC}}\approx 18°$.

## Exercice 2 :

**1.** $f : x \to \dfrac{x^2+3}{x-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$de dérivée : $f'(x) = \dfrac{2x(x-1)-(x^2+3)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$.

Sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $f'(x)$ admet le signe de $x^2-2x-3$ car $(x-1)^2 > 0$. $x^2-2x-3$ est positif (coefficient de $x^2$ positif) à l'extérieur de ses deux racines –1 et 3.

*f* est donc croissante sur $]-\infty;-1]$ et sur $[3;+\infty[$, et *f* est décroissante sur $[-1;1[$ et sur ]1;3].

**2.** $f(-1) = \dfrac{4}{-2} = -2$ et $f(3) = \dfrac{12}{2} = 6$. On obtient alors le tableau de variation suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | | ↗ | $-2$ | ↘ | $\Vert$ | ↘ | $6$ | ↗ | |

**3.** Après réduction au même dénominateur et identification, on a pour tout $x \neq 1$, $f(x) = x+1+\dfrac{4}{x-1}$.

**4.** $A(1;2)$ est un centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$ car :

$$\frac{f(1-x)+f(1+x)}{2} = \frac{1-x+1+\dfrac{4}{1-x-1}+1+x+1+\dfrac{4}{1+x-1}}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ et } \mathbb{R}\setminus\{1\}\text{est centré en 1.}$$

**5.** $\mathcal{T}_0 : y = f'(0)(x-0)+f(0) \Leftrightarrow \mathcal{T}_0 : y = -3x-3$.

## Exercice 3 :

**1.** $v_{n+1} = u_{n+1} - \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{2}u_n - \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{2}\left(u_n - \dfrac{2}{5}\right) = \dfrac{1}{2}v_n$.

Donc $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_1 = u_1 - \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{10}$.

**2.** D'après la question précédente, on a : $v_n = v_1 \times q^{n-1} = \dfrac{1}{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Or $v_n = u_n - \dfrac{2}{5}$ donc $u_n = v_n + \dfrac{2}{5}$ soit $u_n = \dfrac{1}{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} + \dfrac{2}{5}$.

Ainsi, $u_4 = \dfrac{1}{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{4-1} + \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3} + \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{10}\times\dfrac{1}{8} + \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{80} + \dfrac{32}{80} = \dfrac{33}{80}$.

**3.** $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2}u_n - \dfrac{2}{5} - u_n = -\dfrac{1}{2}u_n - \dfrac{2}{5}$. De manière évidente $u_n > 0$ donc $u_{n+1} - u_n < 0$. Ce qui prouve que la suite $(u_n)$ est décroissante.

De plus $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ puisque $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{2}{5}$.

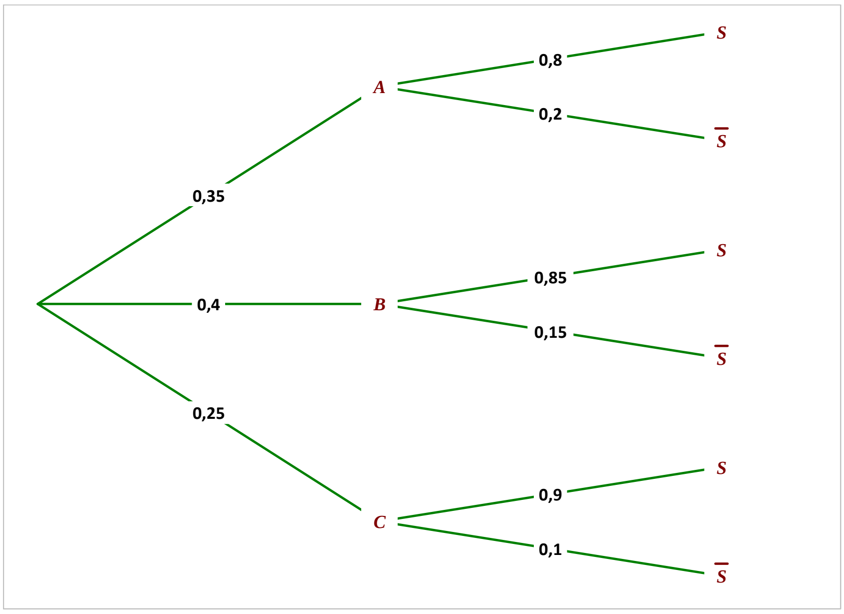
**4.** À l'aide de la calculatrice, on obtient : $u_7 \approx 0{,}40156$ et $u_8 \approx 0{,}40078$. Donc $p = 8$.

**5.** $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = v_1 + \frac{2}{5} + v_2 + \frac{2}{5} + \ldots + v_n + \frac{2}{5} = v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \frac{2}{5}n = \frac{1}{10} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} + \frac{2}{5}n$.

Donc $S_n = \frac{1}{5}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] + \frac{2}{5}n$.

**Exercice 4 :**

**1.** Construisons l'arbre de probabilité correspondant à la situation :




Où A : « le client utilise moins de 12 tonnes de papier par an »
B : « le client utilise entre 12 et 20 tonnes de papier par an »
C : « le client utilise plus de 20 tonnes de papier par an »
S : « le client est solvable »

**a)** $P(C) = 1 - [P(A) + P(B)] = 1 - 0,75 = 0,25$.

**b)** $P(\overline{S}) = P(\overline{S} \cap A) + P(\overline{S} \cap B) + P(\overline{S} \cap C) = 0,35 \times 0,2 + 0,4 \times 0,15 + 0,25 \times 0,1 = 0,155$.

**2. a)** On a une épreuve de Bernoulli que l'on répète 20 fois de manières indépendantes, on obtient donc un schéma de Bernoulli. La variable aléatoire $X$ qui représente le nombre de clients non solvable suit donc une loi binomiale de paramètre $n = 20$ et $p = 0,155$.

Par conséquent, $E(X) = np = 20 \times 0,155 = 3,1$.

**b)** $P(3 \leqslant X \leqslant 8) = P(X \leqslant 8) - P(X < 3) = P(X \leqslant 8) - P(X \leqslant 2)$.

À l'aide de la calculatrice, on obtient : $P(3 \leqslant X \leqslant 8) \approx 0,61729$.

$P(X \geqslant 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - P(X \leqslant 3)$.

À l'aide de la calculatrice, on obtient : $P(X \geqslant 4) \approx 0,37661$.