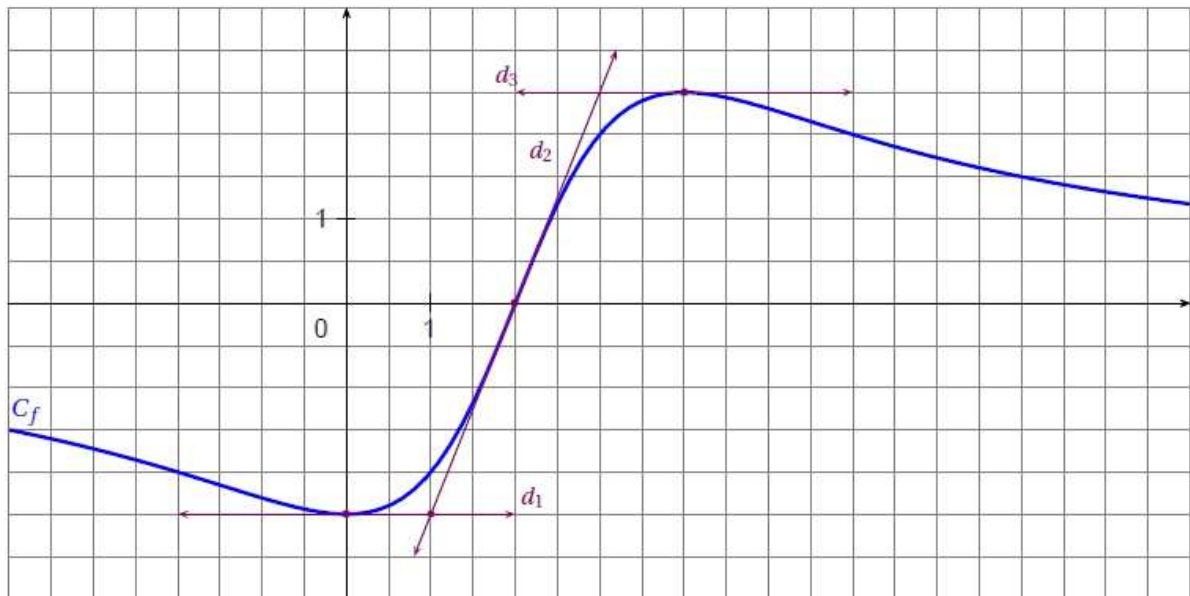


**Les exercices de cette feuille sont à travailler pendant les vacances.
Vous serez interrogés sur des exercices similaires à la rentrée.**

Exercice 1 : Sur la figure ci-dessous les droites d_1 , d_2 , d_3 et d_4 sont tangentes à la courbe \mathcal{C}_f représentative d'une fonction f dérivable sur \mathbb{R} .



1. Déterminer graphiquement $f(0)$, $f(2)$, $f(4)$ et $f(8)$.
2. Déterminer graphiquement les nombres dérivés $f'(0)$, $f'(2)$, $f'(4)$.
3. Sachant que $f'(8) = -\frac{1}{5}$. Construire sur le graphique la tangente au point d'abscisse 8.

Exercice 2 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$.

1. Étudier le sens de variation de f .
2. Dresser le tableau de variations de f .
3. Déterminer les réels a , b et c tels que, pour tout $x \neq 1$, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 1}$.
4. Montrer que le point $A(1; 2)$ est un centre de symétrie de la courbe \mathcal{C}_f .
5. Trouver une équation de la tangente \mathcal{T} à la courbe \mathcal{C}_f de f au point d'abscisse 0.

Exercice 3 : Au 1^{er} janvier 2005, une petite ville avait une population de 15 000 habitants. Une étude a permis de constater qu'à partir du 1^{er} janvier 2005, du fait des flux migratoires : 8% des habitants quittent la ville chaque année et 1 000 personnes supplémentaires viennent s'installer chaque année dans cette ville.

Pour tout entier naturel n , on appelle u_n le nombre d'habitants de cette ville le 1^{er} janvier de l'année $(2005 + n)$. Ainsi, $u_0 = 15000$.

1. a) Calculer u_1 , et u_2 . La suite (u_n) de terme général u_n est-elle arithmétique ? géométrique ?

Justifier les réponses.

b) Expliquer ensuite pourquoi on a, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,92 u_n + 1000$.

2. Pour tout entier naturel n , on pose : $v_n = u_n - 12500$.

a) Démontrer que la suite (v_n) de terme général v_n est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme v_0

b) Exprimer v_n en fonction de n . En déduire que pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 2500 \times 0,92^n + 12500.$$

3. En se basant sur ce modèle théorique, quel serait le pourcentage d'évolution du nombre

d'habitants de la ville entre le 1^{er} janvier 2005 et le 1^{er} janvier 2015 ? (Arrondir le résultat à 0,1 % près)

Exercice 4 : Lors d'une étude de marché, la société PAPEX a étudié la répartition de ses clients selon deux critères, leur besoin en papier et leur possibilité de financement :

35% de ses clients utilisent moins de 12 tonnes de papier par an et, parmi ceux-ci, 80% sont solvables.

40% de ses clients utilisent de 12 à 20 tonnes de papier par an et, parmi ceux-ci, 85% sont solvables.

Pour le reste de ses clients, seuls 10% ne sont pas solvables.

1. La société choisit au hasard l'un de ses clients. Quelle est la probabilité :

a) pour qu'il utilise plus de 20 tonnes de papier ?

b) pour qu'il ne soit pas solvable ?

2. La société établit un échantillon de 20 de ses clients choisis au hasard. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de clients non solvables parmi ces 20 clients.

a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et son espérance.

b) Calculer $P(3 \leq X \leq 8)$ et $P(X \geq 4)$. On donnera les résultats à la cinquième décimale.

ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Exercice 1 :

1. $f(0)$, $f(2)$, $f(4)$ et $f(8)$ sont les ordonnées des points de la courbe d'abscisses respectives 0, 2, 4 et 8.

Donc $f(0) = -2,5$; $f(2) = 0$; $f(4) = 2,5$ et $f(8) = 1,5$.

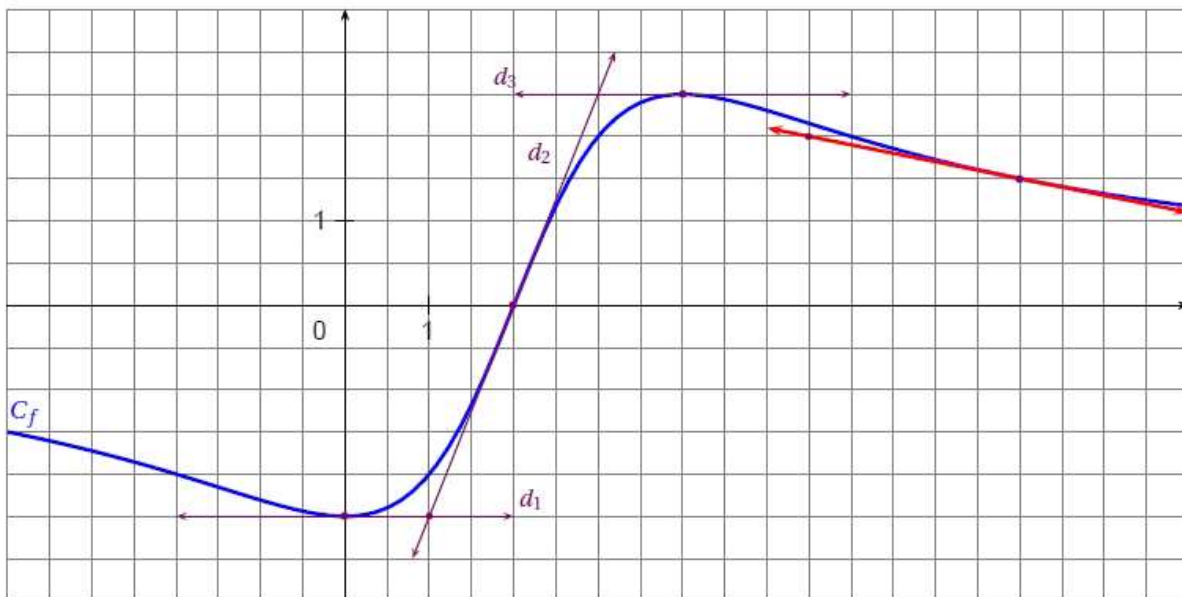
2. Graphiquement, le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse a .

Les tangentes d_1 et d_3 sont parallèles à l'axe des abscisses donc leur coefficient directeur est nul.

Par conséquent, $f'(0) = 0$ et $f'(4) = 0$.

Graphiquement, $f'(2) = \frac{V}{H} = \frac{5}{2}$.

3. Graphique



Exercice 2 :

1. $f : x \rightarrow \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ de dérivée : $f'(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2 + 3)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$.

Sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f'(x)$ admet le signe de $x^2 - 2x - 3$ car $(x-1)^2 > 0$. $x^2 - 2x - 3$ est positif (coefficient de x^2 positif) à l'extérieur de ses deux racines -1 et 3 .

f est donc croissante sur $] -\infty; -1]$ et sur $[3; +\infty [$, et f est décroissante sur $[-1; 1 [$ et sur $] 1; 3]$.

2. $f(-1) = \frac{4}{-2} = -2$ et $f(3) = \frac{12}{2} = 6$. On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
f	-2			6		

3. Après réduction au même dénominateur et identification, on a pour tout $x \neq 1$, $f(x) = x + 1 + \frac{4}{x-1}$.

4. $A(1;2)$ est un centre de symétrie de \mathcal{C}_f car :

$$\frac{f(1-x) + f(1+x)}{2} = \frac{1-x+1 + \frac{4}{1-x-1} + 1+x+1 + \frac{4}{1+x-1}}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ et } \mathbb{R} \setminus \{1\} \text{ est centré en } 1.$$

5. $\mathcal{T}_0 : y = f'(0)(x-0) + f(0) \Leftrightarrow \mathcal{T}_0 : y = -3x - 3$.

Exercice 3 :

1. a) Le 1^{er} janvier 2006, 8% des habitants ont quitté la ville et 1 000 personnes sont venues s'installer alors : $u_1 = 0,92 \times u_0 + 1000$ d'où $u_1 = 0,92 \times 15000 + 1000$. Soit $u_1 = 14800$.

Le 1^{er} janvier 2007, 8% des habitants ont quitté la ville et 1 000 personnes sont venues s'installer alors : $u_2 = 0,92 \times u_1 + 1000$ d'où $u_2 = 0,92 \times 14800 + 1000$. Soit $u_2 = 14616$.

Dire qu'une suite (u_n) est arithmétique signifie qu'il existe un réel r , appelé raison, tel que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + r$.

Or $u_1 - u_0 = 200$ et $u_2 - u_1 = 184$. Donc La suite (u_n) n'est pas une suite arithmétique.

Dire qu'une suite (u_n) est géométrique signifie qu'il existe un réel q , appelé raison, tel que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = q \times u_n$.

$$\text{Or } \frac{u_1}{u_0} = \frac{14800}{15000} \approx 0,9867 \text{ et } \frac{u_2}{u_1} = \frac{14616}{14800} \approx 0,9876$$

Donc La suite (u_n) n'est pas une suite géométrique.

b) Le 1^{er} janvier de l'année suivante, 8% des habitants auront quitté la ville et 1 000 personnes seront venues s'installer alors : $CM = 1 - \frac{8}{100} = 0,92$ donc $u_{n+1} = 0,92 u_n + 1000$.

$$\begin{aligned} 2. \text{ a) } v_{n+1} = u_{n+1} - 12500 &\Leftrightarrow v_{n+1} = 0,92 u_n + 1000 - 12500 = 0,92 u_n - 11500 \Leftrightarrow v_{n+1} = 0,92 \left(u_n - \frac{11500}{0,92} \right) \\ &\Leftrightarrow v_{n+1} = 0,92 (u_n - 12500) \Leftrightarrow v_{n+1} = 0,92 v_n. \end{aligned}$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison 0,92 et de premier terme $v_0 = u_0 - 12500 = 2500$.

b) (v_n) est géométrique de raison 0,92 et de premier terme $v_0 = 2500$. Donc $v_n = v_0 \times q^n = 2500 \times (0,92)^n$.

Or $v_n = u_n - 12500$ donc $u_n = v_n + 12500$ soit $u_n = 2500 \times (0,92)^n + 12500$.

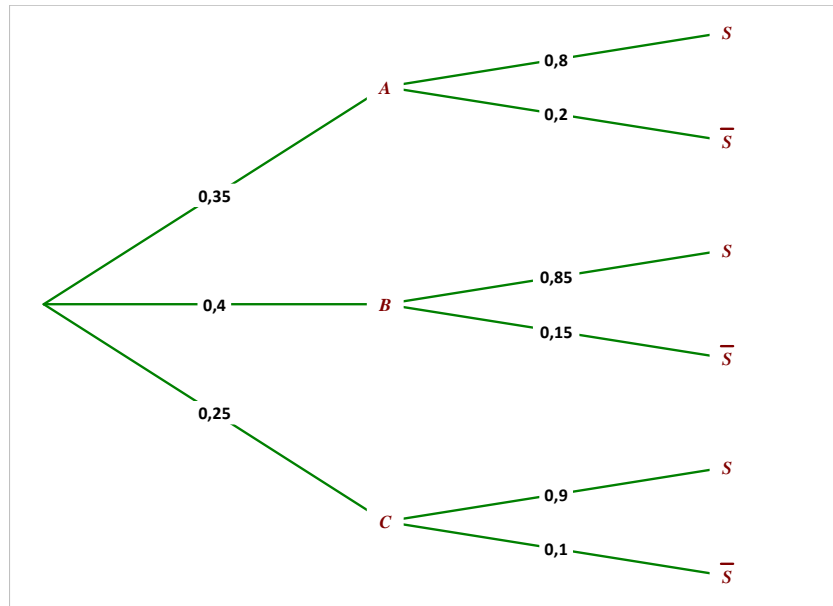
3. Au 1^{er} janvier 2015 i.e. pour $n = 10$, le nombre d'habitants est donné par : $u_{10} = 2500 \times (0,92)^{10} + 12500$ soit $u_{10} \approx 13586$.

Le pourcentage d'évolution est donc : $t = \frac{VA - VD}{VD} \times 100 = \frac{13586 - 15000}{15000} \times 100$. Soit $t \approx -9,43$.

Entre le 1^{er} janvier 2005 et le 1^{er} janvier 2015, le nombre d'habitants baissera d'environ de 9,43%.

Exercice 4 :

1. Construisons l'arbre de probabilité correspondant à la situation :



Où A : « le client utilise moins de 12 tonnes de papier par an »

B : « le client utilise entre 12 et 20 tonnes de papier par an »

C : « le client utilise plus de 20 tonnes de papier par an »

S : « le client est solvable »

- a) $P(C) = 1 - [P(A) + P(B)] = 1 - 0,75 = 0,25$.
- b) $P(\bar{S}) = P(\bar{S} \cap A) + P(\bar{S} \cap B) + P(\bar{S} \cap C) = 0,35 \times 0,2 + 0,4 \times 0,15 + 0,25 \times 0,1 = 0,155$.
2. a) On a une épreuve de Bernoulli que l'on répète 20 fois de manières indépendantes, on obtient donc un schéma de Bernoulli. La variable aléatoire X qui représente le nombre de clients non solvable suit donc une loi binomiale de paramètre $n = 20$ et $p = 0,155$.
- Par conséquent, $E(X) = np = 20 \times 0,155 = 3,1$.
- b) $P(3 \leq X \leq 8) = P(X \leq 8) - P(X < 3) = P(X \leq 8) - P(X \leq 2)$.
- À l'aide de la calculatrice, on obtient : $P(3 \leq X \leq 8) \approx 0,61729$.
- $P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - P(X \leq 3)$.
- À l'aide de la calculatrice, on obtient : $P(X \geq 4) \approx 0,37661$.